Jochen Weber

Lineare Gleichungssysteme

Beispiel:
Eine Firma stellt drei verschiedene Produkte A, B und C her. Die Produkte durchlaufen während ihrer Herstellung drei verschiedene Werkstätten, eine Schreiner-, eine Schlosser- und eine Kunststoffwerkstatt. Dabei wird zur Herstellung eines Stücks dieser Produkte jeweils eine bestimmte Anzahl von Arbeitsstunden in den einzelnen Werkstätten benötigt:

	A	B	C
Schreinerei	6	2	0
Schlosserei	4	3	3
Kunststoff	0	1	4

Es sollen nun 4 Stück des Produkts A, 3 Stück des Produkts B und 1 Stück des Produkts C hergestellt werden.
Bestimmen Sie, wie viele Arbeitsstunden in den einzelnen Werkstätten benötigt werden.

Schreinerwerkstatt: $4\cdot 6+3\cdot 2+1\cdot 0=30$ Arbeitsstunden

Schlosserwerkstatt: $4\cdot 4+3\cdot 3+1\cdot 3=28$ Arbeitsstunden

Kunststoffwerkstatt: $4\cdot 0+3\cdot 1+1\cdot 4=7$ Arbeitsstunden

Bestimmen Sie nun, wie viel Stück der Werkstücke A, B und C hergestellt werden können, wenn in der Schreinerwerkstatt 22 Stunden, in der Schlosserwerkstatt 33 Stunden und in der Kunststoffwerkstatt 22 Stunden benötigt werden.

(I) $6x_1+2x_2+0x_3=22$
(II) $4x_1+3x_2+3x_3=33$ "Lineares Gleichungssystem"
(III) $0x_1+x_2+4x_3=22$

Beispiel:

(I) $6x_1 + 2x_2 + 0x_3 = 22$

(II) $4x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 33$

(III) $0x_1 + x_2 + 4x_3 = 22$

Lösung dieses linearen Gleichungssystems mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus:

Koeffizientenmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$(A/b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 0 & 22 \\ 4 & 3 & 3 & 33 \\ 0 & 1 & 4 & 22 \end{array}\right)$$

Ziel: Dreiecksform der Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{array}\right)$$

* sind reelle Zahlen

1. Schritt: In der ersten Spalte muss statt 4 eine Null stehen

$$4\cdot(I) - 6\cdot(II):\quad 0 \quad -10 \quad -18 \;\big|\; -110$$

$$\begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 0 & 22 \\ 0 & -10 & -18 & -110 \\ 0 & 1 & 4 & 22 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 0 & 22 \\ 0 & 5 & 9 & 55 \\ 0 & 1 & 4 & 22 \end{array}\right)$$

2. Schritt: In der zweiten Spalte muss statt 1 eine Null stehen

$$5\cdot(III) - (II):\quad 0 \quad 0 \quad 11 \;\big|\; 55$$

$$\begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 0 & 22 \\ 0 & 5 & 9 & 55 \\ 0 & 0 & 11 & 55 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 0 & 22 \\ 0 & 5 & 9 & 55 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

3. Schritt: Berechnen der Lösung des linearen Gleichungssystems

$(III) \Rightarrow x_3 = 5$

$(II) \Rightarrow 5x_2 + 9x_3 = 55 \quad \Rightarrow x_2 = 2$

$(I) \Rightarrow 6x_1 + 2x_2 = 22 \quad \Rightarrow x_1 = 3$

$\Rightarrow (3/2/5)$ ist Lösung des linearen Gleichungssystems (LGS)

Allgemeines lineares Gleichungssystem:

(I) $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$

(II) $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$

(III)

(IV)

:

:

(m) $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$

m Gleichungen für n Unbekannte (m – n – System)

Es gilt:

(1) Ist $(b_1, b_2, \ldots, b_m) = (0, 0, \ldots, 0)$, so heißt das lineare Gleichungssystem homogen, sonst inhomogen.

(2) Ist $m > n$ ($m < n$), so heißt das lineare Gleichungssystem überbestimmt (unterbestimmt).

Aufgaben:

1

(I) $2x_1+3x_2+x_3=0$

(II) $x_1+x_2+x_3=-1$

(III) $5x_1-x_2+2x_3=1$

2

(I) $x_1-x_2+2x_3=1$

(II) $2x_1+3x_2-x_3=3$

(III) $4x_1+x_2+3x_3=5$

3

(I) $x_1-2x_2+x_3=1$

(II) $-x_1-5x_2-5x_3=0$

4

(I) $x_1-7x_2=22$

(II) $3x_1+5x_2=-12$

(III) $3x_1+6x_2=8$

Lösungen:

1

$$\begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[5\cdot(I)-2\cdot(III)]{2\cdot(II)-(I)} \begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 17 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{17\cdot(III)+(II)} \begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 18 & -36 \end{array} \right)$$

$(III) \Rightarrow 18x_3 = -36 \quad \Rightarrow x_3 = -2$

$(II) \Rightarrow -x_2 + x_3 = -2 \quad \Rightarrow x_2 = 0$

$(I) \Rightarrow 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 1$

$\Rightarrow (1/0/-2)$ ist Lösung des linearen Gleichungssystems (LGS)

2

$$\begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow[4\cdot(I)-(III)]{2\cdot(I)-(II)} \begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & -1 \\ 0 & -5 & 5 & -1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{II)+(III)} \begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$(III) \Rightarrow 0x_3 = 0 \quad \Rightarrow x_3$ beliebig z.B. $x_3 = z$

$(II) \Rightarrow -5x_2 + 5x_3 = -1 \quad \Rightarrow x_2 = \frac{1}{5} + z$

$(I) \Rightarrow x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \quad \Rightarrow x_1 = \frac{6}{5} - z$

$\Rightarrow (\frac{6}{5} - z / \frac{1}{5} + z / z)$ ist Lösung des linearen Gleichungssystems (LGS)

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \left\{ \vec{x} \,/\, \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

3

$$\begin{array}{c}(I)\\(II)\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 1\\-1 & -5 & -5 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{(I)+(II)}\begin{array}{c}(I)\\(II)\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 1\\0 & -7 & -4 & 1\end{array}\right)$$

$(II)\Rightarrow -7x_2-4x_3=1 \quad \Rightarrow x_3$ beliebig z.B. $x_3=z \quad \Rightarrow x_2=-\frac{1}{7}-\frac{4}{7}z$

$(I)\Rightarrow x_1-2x_2+x_3=1 \quad \Rightarrow x_1=\frac{5}{7}-\frac{15}{7}z$

$\Rightarrow\left(\frac{5}{7}-\frac{15}{7}z\,|-\frac{1}{7}-\frac{4}{7}z\,|\,z\right)$ ist Lösung des LGS

4

$$\begin{array}{c}(I)\\(II)\\(III)\end{array}\left(\begin{array}{cc|c}1 & -7 & 22\\3 & 5 & -12\\3 & 6 & 8\end{array}\right)\xrightarrow{3\cdot(I)-(III)}\begin{array}{c}(I)\\(II)\\(III)\end{array}\left(\begin{array}{cc|c}1 & -7 & 22\\3 & 5 & -12\\0 & -27 & 58\end{array}\right)$$

$(III)\Rightarrow -27x_2=58 \quad \Rightarrow x_2=-\frac{58}{27}$

$(II)\Rightarrow 3x_1+5x_2=-12 \quad \Rightarrow x_1=-\frac{34}{81}$

Überprüfen mit (I): $x_1-7x_2=22 \quad \Rightarrow -\frac{34}{81}-7\cdot(-\frac{58}{27})=22 \;\Rightarrow \frac{1181}{81}=22$ (f)

$\Rightarrow \mathbb{L}=\emptyset$